Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Buenos Aires

SEMINARIO UNIVERSITARIO 2024

EXAMEN FINAL - 18/03/2024

Apellido y Nombre: ....

Número de Documento: .... Especialidad:...

TEMA 2

1		2		3		4		5	NOTA

- La duración del examen es de 150 minutos.
- Condición mínima de aprobación (6 puntos): 50% del examen bien resuelto.
- Todas las respuestas deben estar JUSTIFICADAS.

EJERCICIO 1:

(a) Considere la recta de ecuación $y = 2x + 1$. Hallar el valor de $c \in \mathbb{R}$ sabiendo que la parábola de ecuación $y = x^2 - 2x + c$ interseca a dicha recta en un solo punto.

(b) Resolver la ecuación

$$2^{4x} - 2^{1+3x} - 3 \cdot 2^{2x} + 2^{3+x} - 4 = 0$$

EJERCICIO 2:

(a) Se lanza desde el suelo una moneda verticalmente **hacia arriba** con una velocidad inicial de $16\,m/s$. En el mismo instante y sobre la misma vertical se lanza verticalmente **hacia abajo** con una velocidad inicial de $4\,m/s$ una piedra desde una altura de 40 metros. calcular la altura a la cual colisionan la moneda y la piedra.

(b) Sea $f : D_f \to \mathbb{R} / f(x) = \sqrt{\dfrac{|x-5|-2}{x+3}}$. Calcular el dominio de f.

EJERCICIO 3: Sean $f : D_f \to \mathbb{R} / f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ y $g : D_g \to \mathbb{R} / g(x) = \log_b(x - c)$. Sabiendo que las gráficas de f y g tienen la misma asíntota vertical y que $g^{-1}(-2) = \dfrac{28}{9}$, se pide:

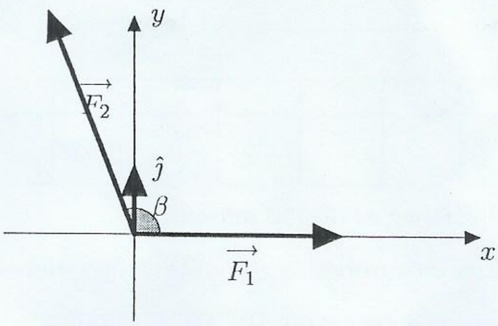
(a) Calcular $\left(f \circ g^{-1}\right)(1)$.

(b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$x = f(x) + 2$$

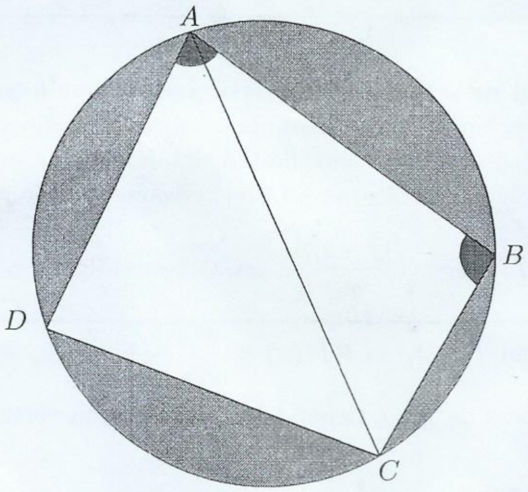
EJERCICIO 4:

(a) Sobre una partícula situada en el centro de coordenadas actúan dos fuerzas $\overrightarrow{F_1}$ y $\overrightarrow{F_2}$. Se sabe que $\overrightarrow{F_1} = (9,0)N$ y que $\overrightarrow{F_2} = (18N, \beta)$. Determinar $\overrightarrow{F_2}$ sabiendo que la resultante tiene la dirección del versor $\hat{\jmath}$.



(b) Determinar todos los valores reales de k para que el coseno del ángulo comprendido entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sea igual a $\frac{\sqrt{5}}{5}$, sabiendo que $\vec{v} = (-1;2)$ y que $\vec{w} = (1+k;2)$.

EJERCICIO 5: El cuadrilátero $ABCD$ está inscripto en una circunferencia de $8\,cm$ de diámetro. Se sabe que el ángulo $\angle DAB = 80°$, el $\angle ABC = 95°$ y los lados AB, BC y DA miden respectivamente $6{,}5\,cm$, $4\,cm$ y $5{,}7\,cm$. Calcular el área de la región sombreada.



Seminario Universitario	Final	tema 2 t.t.	HOJA Nº 1 / FECHA 18-3-24

① a) Considere la recta de ec. $y = 2x+1$. Hallar el valor de $c \in \mathbb{R}$ sabiendo que la parábola de ecuación $y = x^2-2x+c$ interseca a dicha recta en un solo punto!

$$\mathbb{L} \cap \mathbb{C}$$

$$2x+1 = x^2-2x+c$$

$$0 = x^2-4x+c-1$$

1 solo punto $\Rightarrow$ 1 raíz doble $\rightarrow b^2-4ac=0$

$$(-4)^2-4\times 1(c-1) = 16-4c+4$$

$$4c = 20 \rightarrow \boxed{c=5}$$

/

b) Resolver la ecuación

$$2^{4x}-2^{1+3x}-3.2^{2x}+2^{3+x}-4=0$$

$$(2^x)^4-2^1.2^{3x}-3.(2^x)^2+2^3.2^x-4=0$$

$$(2^x)^4-2\times(2^x)^3-3(2^x)^2+8.2^x-4=0$$

$t=2^x \longrightarrow t^4-2t^3-3t^2+8t-4=0$

$\hookrightarrow \boxed{t=1}$ es raíz y $\boxed{t=2}$ dos raíces

x Ruffini:

	t					
	1	-2	-3	8	-4	$\leftarrow t^4$
$t=1$ es raíz $\rightarrow$ 1		1	-1	-4	4	
	1	-1	-4	4	$\boxed{0}$ ✓	$\leftarrow t^3$
$t=2$ es raíz 2		2	2	-4		
	1	1	-2	$\boxed{0}$ ✓		$\leftarrow t^2$

$s(t) = t^2+t-2 \rightarrow \boxed{t=1} \leftarrow$ raíz doble

$\rightarrow \boxed{t=-2}$

$t=1=2^{x_1} \rightarrow \boxed{x_1=0}$

$t=-2=2^x \rightarrow \emptyset$

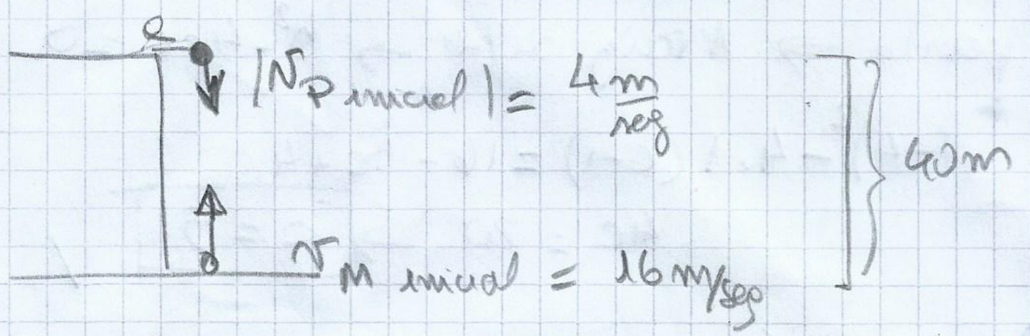
$t=2=2^x \rightarrow \boxed{x_2=1}$

$$\boxed{S=\{0;1\}}$$

/

NOTA

② a) Se lanza desde el suelo una moneda verticalmente HACIA ARRIBA con una velocidad inicial de 16 m/seg.
En el mismo instante, y sobre la misma vertical, se lanza verticalmente HACIA ABAJO con una velocidad inicial de $4 \frac{m}{s}$ una piedra desde una altura de 40 metros.
Calcular la altura a la cual colisionan la moneda y la piedra



$$X_{P(t)} = 40\,m - 4\frac{m}{seg}\,t - 5\frac{m}{seg^2}\,t^2$$

$$X_{M(t)} = 0\,m + 16\frac{m}{seg}\,t - 5\frac{m}{seg^2}\,t^2$$

en t encuentro $\rightarrow X_{P}(te) = X_{M}(te)$

$$40m - 4\frac{m}{seg}\,te - \cancel{5\frac{m}{seg^2}\,te^2} = 16\frac{m}{seg}\,te - \cancel{5\frac{m}{seg^2}\,t^2}$$

$$40m = 20\frac{m}{seg}\,te \rightarrow \boxed{te = 2\,seg}$$

$$Xe = X_{M(2)} = 16\frac{m}{seg}(2\,seg) - 5\frac{m}{seg^2}(2\,seg)^2 = 12\,m$$

$$\boxed{Xe = 12\,m}$$

Seminario Universitario	Final	Tema 2 T.T.	HOJA N° 2 FECHA 18-3-24

2) b) Sea $f: Df \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = \sqrt{\dfrac{|x-5|-2}{x+3}}$. Calcular Df

tomado en el recuperatorio del viernes.

$$Df \Rightarrow \frac{|x-5|-2}{x+3} \geq 0$$

$+/+$

$|x-5|-2 \geq 0 \;\wedge\; x+3>0$

$\boxed{x>-3}$

$x \geq 5$

$x-5-2 \geq 0$

$\boxed{x \geq 7}$

$x<5$

$-x+5-2 \geq 0$

$\boxed{3 \geq x}$

$\boxed{x \geq 7}$

$\boxed{-3 < x \leq 3}$

$-/-$

$|x-5|-2<0 \;\wedge\; x+3<0$

$\boxed{x<-3}$

$x \geq 5$

$\emptyset$

$\underbrace{x<5}$

$\boxed{x<-3}$

$-x+5-2<0$

$3<x$

$\underbrace{x<-3 \;\wedge\; x>3}$

$\emptyset$

$$\boxed{S = (-3;3] \cup [7,+\infty)}$$ ✓

NOTA

③ Sean $f: D_f \to \mathbb{R}$ / $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$

y $g: D_g \to \mathbb{R}$ / $g(x) = \log_b (x-c)$

Sabiendo que las gráficas de f y g tienen la misma asíntota vertical y que $g^{-1}(-2) = \frac{28}{9}$, se pide:

a) Calcular $(f \circ g^{-1})(1)$

$f(x) = \frac{x+1}{x-3} \to \boxed{AV: x = 3} \to D_g = (3, +\infty)$

$g(x) = \log_b (x-3)$

$g^{-1}(-2) = \frac{28}{9} \Rightarrow g\left(\frac{28}{9}\right) = -2$

$\hookrightarrow g\left(\frac{28}{9}\right) = \log_b \left(\frac{28}{9} - 3\right) = -2$

$\log_b\left(\frac{1}{9}\right) = -2$

$\hookrightarrow b^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{b^2}$

$\boxed{b = 3}$

$\boxed{g(x) = \log_3 (x-3)}$

$y = \log_3 (x-3)$

$3^y = 3^{\log_3 (x-3)} = x - 3 \to x = 3^y + 3$

$\boxed{g^{-1}(x) = 3^x + 3}$

$f \circ g^{-1}(1) = f(g^{-1}(1)) = f(3^1 + 3) = f(6) = -\frac{1}{3}$ $\boxed{f \circ g^{-1}(1) = \frac{7}{3}}$

b) Encontrar todas las soluc. de $x = f(x) + 2$

$x = f(x) + 2 = \frac{x+1}{x-3} + 2 = \frac{x+1+2(x-3)}{x-3} = \frac{\overbrace{x+1+2x-6}^{3x-5}}{x-3} = x$

$\frac{3x-5}{x-3} = x \to 3x - 5 = x(x-3) = x^2 - 3x =$

$x^2 - 6x + 5 = 0$ $\to x_1 = 1$, $x_2 = 5$

$\boxed{S = \{1; 5\}}$

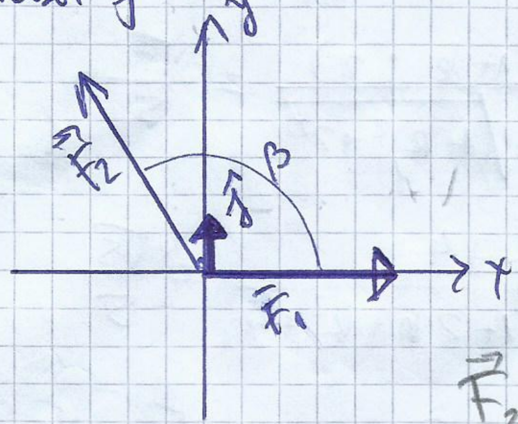
NOTA

Seminario Universitario	Final	tema 2 TT	HOJA N° 3 FECHA 18-3-24

(4) a) Sobre una partícula situada en el centro de coordenadas actúan dos fuerzas F_1 y F_2

Se sabe que $\vec{F_1} = (9;0)\,N$ y que $\vec{F_2} = (18\,N, \beta)$

Determinar $\vec{F_2}$ sabiendo que la resultante tiene la dirección del versor $\hat{j}$



$\bar{R} = \bar{F_1} + \bar{F_2}$

como $\bar{R}$ está en el versor $\hat{j} \Rightarrow$ en $\hat{i}$ vale 0

$\bar{R} = (0, R_{\hat{j}})$

$\vec{F_2} = (18\,N\cos(\beta),\ 18\,N\,\mathrm{sen}(\beta))$

$\bar{F_1} = (\ 9\,N\ ,\ 0\,N\ )$

$\bar{R} = (\underbrace{18\cos(\beta)+9}_{0}\ ;\ 18\,\mathrm{sen}(\beta))\,N$

$\overbrace{18\cos(\beta) = -9}^{\bar{F}_{2x}}$

$\cos(\beta) = -\frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{\beta = 120°}$ o $\beta = -120°$

$\boxed{\beta = 240°}$ ↳ se descarta (está en 3° cuadr.)

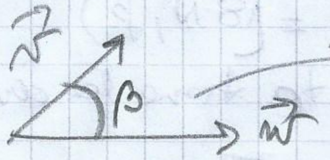
$\bar{F}_{2y} = 18\,N\,\mathrm{sen}(120°) = 9\sqrt{3}\,N$

$\boxed{\bar{F_2} = (-9, 9\sqrt{3})\,N}$

NOTA

4) b) Determinar todos los valores reales de k para que el cos del ángulo comprendido entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sea igual a $\frac{\sqrt{5}}{5}$, sabiendo que:

$$\vec{v} = (-1;2) \quad y \quad \vec{w} = (1+k;2)$$



$$\cos(\beta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{(-1,2)\,(1+k\,;\,2)}{\sqrt{\underbrace{(-1)^2+2^2}_{5}} \cdot \sqrt{(1+k)^2+2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{-1-k+4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1+2k+k^2+4}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{-k+3}{\sqrt{k^2+2k+5}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{5} \quad 1$$

$$\boxed{k^2+2k+5>0}$$

$$3-k = \sqrt{k^2+2k+5}$$

$$(3-k)^2 = k^2+2k+5$$

$$9-6k+\cancel{k^2} = \cancel{k^2}+2k+5$$

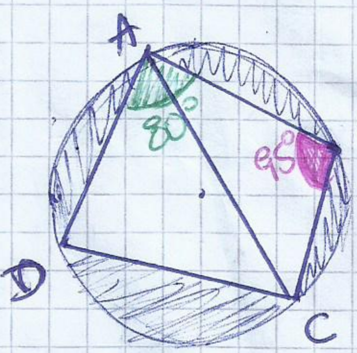
$$4 = 8k \rightarrow \boxed{k = 1/2}$$

Seminario Universitario	Final . tema 2 T. T.	HOJA N° 4 FECHA 18-3-24

(5) El cuadrilátero ABCD está inscripto en una circunferencia de 8 cm de diámetro.

Se sabe que el ángulo $\angle DAB = 80°$, el $\angle ABC = 95°$ y los lados AB, BC y DA miden, respectivamente, 6,5 cm, 4 cm y 5,7 cm.

Calcular el área de la región sombreada.



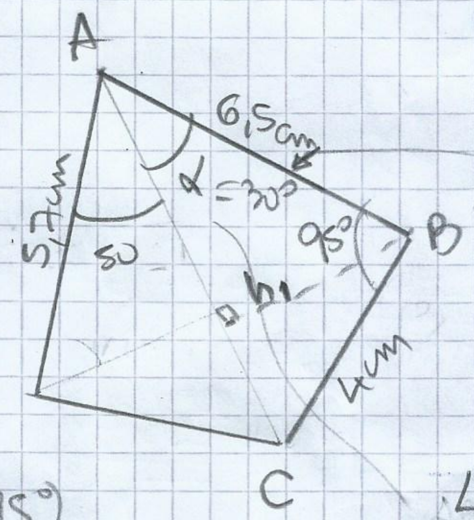
1° Área $= \pi r^2 = \pi \cdot (4cm)^2 = 16\pi cm^2$ $D = 8cm$

$\boxed{A = 16\pi \, cm^2}$ $r = 4cm$

$|\overline{AB}| = 6,5cm$

$|\overline{BC}| = 4cm$

$|\overline{DA}| = 5,7cm$



$\boxed{\frac{|\overline{AC}|}{sen(95°)} = 2r}$

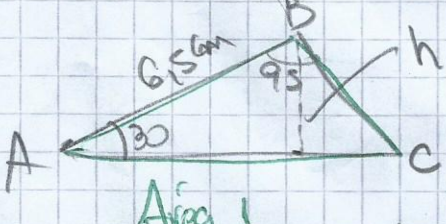
$|\overline{AC}| = 2 \cdot 4cm \cdot sen(95°)$

$\boxed{|\overline{AC}| = 7,97 cm}$

$\frac{4cm}{sen(\alpha)} = \frac{7,97cm}{sen(95)}$

$\frac{4 \cdot sen(95)}{7,97} = sen(\alpha) = 0,5$

$\boxed{\alpha = 30°}$

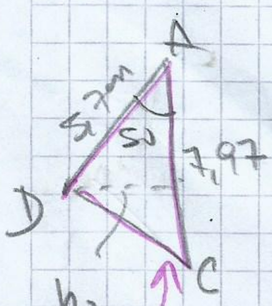


Área 1

$sen(30) = \frac{h}{6,5cm}$

$h = sen(30) \cdot 6,5cm = 3,25 cm = h_1$

$\rightarrow A_1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{7,97 cm \cdot 3,25cm}{2} = \boxed{12,95cm^2 = A_1}$



Área 2

h_2: $sen(50) = \frac{h_2}{5,7cm}$

$h_2 = sen(50) \cdot 5,7cm = \boxed{4,37 cm = h_2}$

$A_2 = \frac{7,97cm \cdot 4,37cm}{2}$

$\boxed{A_2 = 17,41 cm^2}$

$A_{somb} = (16\pi - \underbrace{12,95 - 17,41}_{}) cm^2$ 19,91

$\boxed{A_{somb} = 19,90cm^2}$

NOTA